ALGEBRA M1 - Lista 7

Wyznaczniki

Zad.1. Wykazać, że po przestawieniu 2 wyrazów w ciągu liczb naturalnych liczba inwersji w tym ciągu zmienia się o liczbę nieparzystą.

Zad.2. Wyprowadzić wzór na wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej), tzn takiej, w której $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ $(i < j)$.

Zad. 3. Wyprowadzić wzór na wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n, w której zerują się wszystkie elementy za wyjątkiem $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$.

Zad.4. Korzystając z definicji, obliczyć wyznaczniki podanych macierzy rzeczywistych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad.5. Niech k i n będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że wyznacznik macierzy rzeczywistej wymiaru $n \times n$, której każdy współczynnik jest równy 0 lub k, jest podzielny przez k^n.

Zad.6. Stosując rozwinięcie Laplace'a, obliczyć wyznaczniki macierzy rzeczywistych

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zad.7. Pokazać, że $\det A = \det A^T$, tzn. że wyznacznik macierzy i wyznacznik tzw. macierzy transponowanej zadanej wzorem $a^T_{i,j} = a_{j,i}$ są sobie równe.

Zad.8. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy rzeczywistych, stosując operacje na wierszach (kolumnach)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad.9. Wyprowadzić wzór

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$$

Zad.10. Udowodnić wzór na wyznacznik (tzw. wyznacznik Vandermonde'a) macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Zad.11. Macierz kwadratowa stopnia n nazywa się skośno-symetryczną gdy $a_{i,j} = -a_{j,i}$ dla dowolnych $1 \leq i, j \leq n$. Dowieść, że gdy n jest nieparzyste, to wyznacznik macierzy się zeruje.

Zad.12. Liczby całkowite $1798 = 31 \cdot 58$, $2139 = 31 \cdot 69$, $3255 = 31 \cdot 105$, $4867 = 31 \cdot 157$ dzielą sie przez 31. Udowodnić, że wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

jest także podzielny przez 31.

Zad.13. Stosując wyznaczniki, sprawdzić czy wektory

$$(4, -5, 2, 6), \quad (2, -2, 1, 3), \quad (6, -3, 3, 9), \quad (4, -1, 5, 6)$$

są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

Zad.14. Stosując wyznaczniki, sprawdzić czy wielomiany

$$x^2 + x^3, \quad x^3 + x^4, \quad x^4 + x^5$$

są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$.

Romuald Lenczewski